

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 14

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $(4+7) \cdot 6 - 2 \cdot 3$ este egal cu
- 5p 2. Zece caiete de același fel costă în total 30 de lei. Șapte dintre aceste caiete costă în total ... lei.
- 5p 3. Scrisă sub formă de interval, mulțimea $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\}$ este egală cu
- 5p 4. Perimetrul unui romb este egal cu 48 cm. Lungimea laturii acestui romb este egală cu ... cm.
- 5p 5. În *Figura 1* este reprezentată o prismă triunghiulară cu baza triunghi echilateral. Unghiul dreptelor AB și $A'C'$ are măsura de ... °.

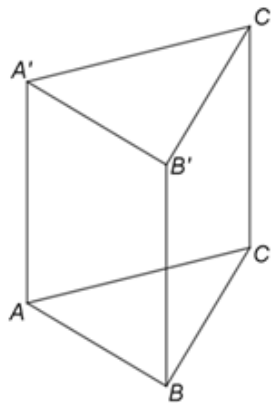
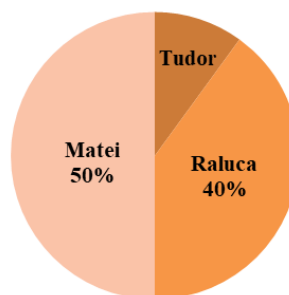


Figura 1

- 5p 6. Rezultatele votului pentru alegerea reprezentantului consiliului elevilor unei școli sunt prezentate în diagrama de mai jos.

Consiliul Elevilor
Rezultate vot



Conform informațiilor din diagramă, numărul elevilor din școală care au votat cu Matei este mai mare decât numărul elevilor care au votat cu Tudor de ... ori.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.
- 5p 2. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ cu $a < b < c$, știind că $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 132$ și că b este media aritmetică a numerelor a și c .
- 5p 3. Mihai a primit de la părinți o sumă de bani. După ce a cheltuit două cincimi din această sumă și apoi 25% din rest, lui Mihai i-au mai rămas 54 de lei. Calculați suma de bani pe care a primit-o Mihai de la părinți.

4. Se consideră numerele reale $x = (3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{405}) \cdot 0,3$ și $y = \left(\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{189}}{\sqrt{28}} \right) : \frac{3}{\sqrt{3}} - |2\sqrt{5} - 5|$.

5p a) Arătați că $x = 3\sqrt{5}$.

5p b) Determinați numărul prim p , știind că numărul natural $N = (x + y)^{2020}$ este divizibil cu p .

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = 2(x+3)^2 - 3(x-1)(x+3) + (x-2)^2 - 31$, unde x este număr real. Calculați valoarea absolută a numărului $A = E(1) - E(2) + E(3) - E(4) + \dots + E(2019) - E(2020)$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În Figura 2 este reprezentat un paralelogram $ABCD$ cu $AD = 6$ cm și $AB = 16$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv CD . Punctele E și F sunt situate pe segmentele BM , respectiv DN , astfel încât $EF \perp MN$ și $ME = NF = 6$ cm.

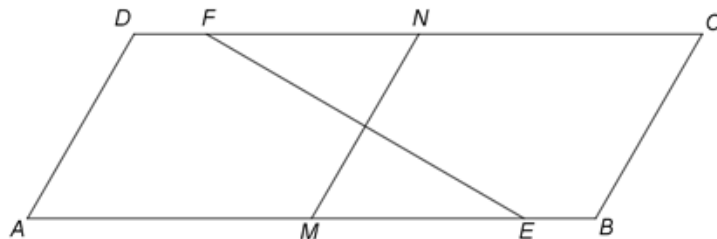


Figura 2

5p a) Arătați că perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 44 cm.

5p b) Demonstrați că dreapta MN este mediatoarea segmentului EF .

5p c) Calculați aria paralelogramului $ABCD$.

2. În Figura 3 este reprezentată o piramidă triunghiulară $VABC$ cu baza triunghiul echilateral ABC , $AB = 12$ cm și înălțimea VO , unde punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Punctul M este mijlocul segmentului BC și $VM = 6$ cm.

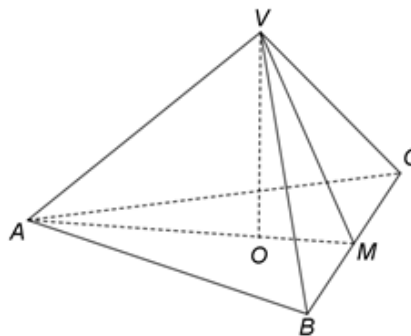


Figura 3

5p a) Arătați că $AM = 6\sqrt{3}$ cm.

5p b) Arătați că $AV \perp (VBC)$.

5p c) Demonstrați că tangenta unghiului dintre dreapta AM și planul (VBC) este egală cu $\sqrt{2}$.

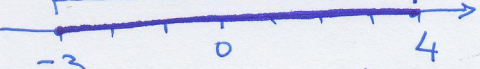
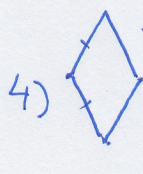
TESTUL 14: (REZOLVARE)

SUBIECTUL I: 1) $(4+7) \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 11 \cdot 6 - 6 = 66 - 6 = 60$.

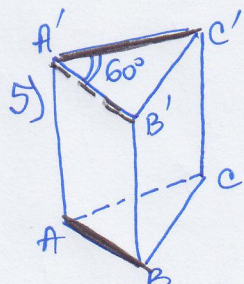
2) 10 caiete ---- 30 lei
7 caiete ---- x

$$x = \frac{30 \cdot 7}{10} = 21 \text{ (lei)}$$

3) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\} = [-3; 4]$



4) $S_{\diamond} = 4 \cdot l = 48 \Rightarrow l = 48 : 4 = 12 \text{ (cm)}$



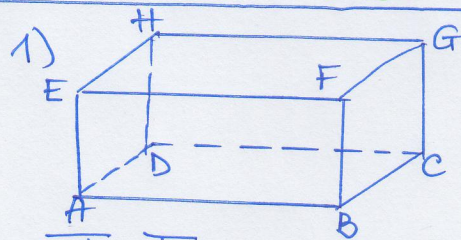
5) AB și $A'C'$: necoplanare
 $A'B' \parallel AB$

$$\Rightarrow m(\widehat{AB; A'C'}) = m(\widehat{A'B; A'C}) = 60^\circ$$

($\angle$ unui triunghi echilateral cu 60°)

6) Cu Matei au votat 50% din elevi, cu Tudor au votat $100\% - (50\% + 40\%) = 100\% - 90\% = 10\%$. 50% este de 5 ori mai mult decât 10%, deci numărul elevilor care au votat cu Matei este mai mare decât nr. elevilor care au votat cu Tudor de 5 ori.

SUBIECTUL al II-lea:



2) $a, b, c \in \mathbb{N}, a < b < c, \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 132 \Leftrightarrow 10a + b + 10b + c + 10c + a = 132$
 $\Leftrightarrow 11a + 11b + 11c = 132 \Leftrightarrow 11(a + b + c) = 132 \Leftrightarrow a + b + c = 132 : 11$
 $\Leftrightarrow a + b + c = 12$

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{a+c}{2} \Leftrightarrow a+c=2b \\ a+c &= 2b \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + (a+c) = 12 \Leftrightarrow b + 2b = 12 \Leftrightarrow 3b = 12 \Leftrightarrow b = \frac{12}{3} = 4$$

$$a+c=2b \Rightarrow a+c=2 \cdot 4=8$$

$$a < c; a, c: \text{cifre zecimale} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=7 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=2 \\ c=6 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=3 \\ c=5 \end{cases}$$

Avem trei soluții posibile: 147; 246 sau 345.

3) Notăm cu x suma primită de Mihai.

Întâi a cheltuit $\frac{2}{5} \cdot x$. I-au rămas $x - \frac{2}{5}x = \frac{5x-2x}{5} = \frac{3x}{5} = \frac{3}{5}x$.

A cheltuit apoi 25% din $\frac{3}{5}x$, adică $\frac{25}{100} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{3}{20}x$.

I-au rămas $\frac{3}{5}x - \frac{3}{20}x = \frac{12x-3x}{20} = \frac{9}{20}x$, ceea ce înseamnă 54 lei.

Deci $\frac{9}{20}x = 54 \Leftrightarrow x = 54 : \frac{9}{20} = 54 \cdot \frac{20}{9} = 120 \text{ (lei)}$. R: A primit 120 lei.

[Obs: Se putea forma o ecuație chiar de la început: (de exemplu):
 $x - \frac{2}{5}x - \frac{25}{100} \left(x - \frac{2}{5}x\right) = 54 \Leftrightarrow x - \frac{2x}{5} - \frac{1}{4}x + \frac{2x}{20} = 54 \mid \cdot 20 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 20x - 8x - 5x + 2x = 1080 \Leftrightarrow 9x = 1080 \Leftrightarrow x = 1080 : 9 \Leftrightarrow x = 120 \text{ (lei)}$]

$$4) a) x = (3 \cdot 2\sqrt{5} - 2 \cdot 3\sqrt{5} + 9\sqrt{5}) \cdot 0,3 = \\ = (6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 9\sqrt{5}) \cdot \frac{3}{9} = \frac{9\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}, \text{ Deci } x = 3\sqrt{5}, \text{ g.e.d.}$$

$$b) y = \left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{3}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{4}\sqrt{3}\cdot 3}{2\sqrt{4}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \\ - (5 - 2\sqrt{5}) = \left(2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \\ - 5 + 2\sqrt{5} = \left(2\sqrt{3} + \frac{6\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 5 + 2\sqrt{5} = \\ = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{3} - 5 + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 5 + 2\sqrt{5} = \frac{5 \cdot 3}{3} - 5 + 2\sqrt{5} = \\ = 5 - 5 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}; \text{ Deci } y = 2\sqrt{5}.$$

$$N = (x+y)^{2020} = (3\sqrt{5} + 2\sqrt{5})^{2020} = (5\sqrt{5})^{2020} = 5^{2020} \cdot (\sqrt{5})^{2020} = 5^{2020} \cdot \sqrt{5^{2020}} = \\ = 5^{2020} \cdot \sqrt{(5^{1010})^2} = 5^{2020} \cdot 5^{1010} = 5^{3030}$$

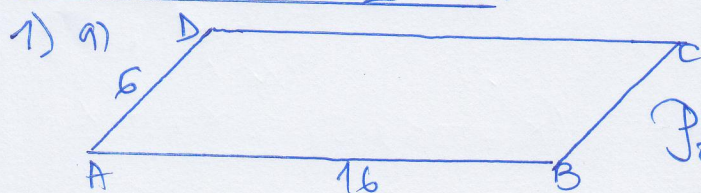
$$N: p \Leftrightarrow 5^{3030} : p \left. \begin{array}{l} p: \text{prim} \end{array} \right\} \Rightarrow p = 5. \left[\begin{array}{l} \text{Obs: } 5^{3030} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{3030 \text{ ori}} : p \\ p: \text{prim} \end{array} \right] \Rightarrow p = 5$$

$$5) E(x) = 2(x^2 + 6x + 9) - 3(x^2 + 2x - 3) + (x^2 - 4x + 4) - 31 = \\ = 2x^2 + 12x + 18 - 3x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 - 31 = \\ = 2x, \text{ deci } E(x) = 2x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

$$A = E(1) - E(2) + E(3) - E(4) + \dots + E(2019) - E(2020) = \\ = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 2019 - 2 \cdot 2020 = \\ = 2 \cdot [(1-2) + (3-4) + \dots + (2019-2020)] = 2 \cdot (\underbrace{-1 -1 - \dots -1}_{1010 \text{ paranteze}}) = \\ = 2 \cdot (-1010) = -2020.$$

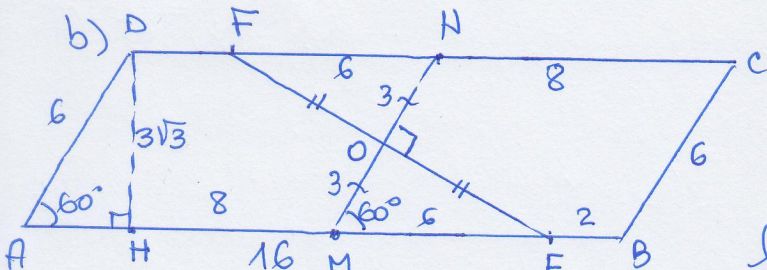
$|A| = |-2020| = 2020$, deci valoarea absolută (modulul) lui A este egală cu 2020.

SUBIECTUL al III-lea:



ABCD paralelogram $\Rightarrow AD = BC = 6 \text{ cm}$
 $m \angle A = m \angle C = 16 \text{ cm}$

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 6 = \\ = 2 \cdot (16 + 6) = 2 \cdot 22 = 44 \text{ (cm)}, \text{ g.e.d.}$$



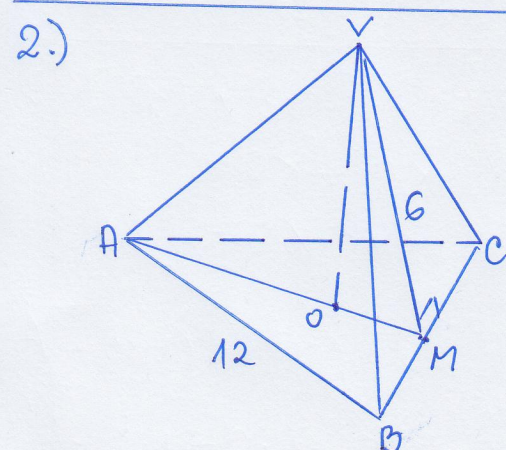
$MN \perp EF$ (1)
 Notăm cu $\{O\} = MN \cap EF$
 Pentru ca MN să fie mediatoarea
 lui $[EF]$ trebuie, pe lângă (1) să

avem și O : mijlocul lui $[EF]$. (Mediatoarea unui segment este perpendiculară pe segment în mijlocul segmentului).
 Avem: $ME \parallel NF$ (pt. că $AB \parallel CD$) și $ME = NF = 6$ cm. Atunci $MENF$ este un paralelogram $\Rightarrow$ diagonalele sale se înjumătățesc, deci O este mijlocul lui $[EF]$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow$ MN este mediatoarea lui $[EF]$, g.e.d.

c) $AMND$ este paralelogram ($AM \parallel ND$, $AM = ND = \frac{16}{2} = 8$ (cm)) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow MN = AD = 6$ cm, deci $OM = ON = \frac{MN}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm.

În $\triangle OME$, dreptunghiul în O avem $\cos \widehat{OME} = \frac{OM}{ME} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{OME}) = 60^\circ$. Deci și $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, pentru că $\widehat{A} \equiv \widehat{OME}$: corespondente.
 Ducem înălțimea $DH \perp AB$ și în $\triangle HAD$, dreptunghiul în H avem:

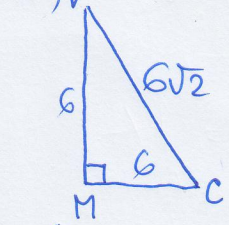
$\sin \widehat{A} = \frac{DH}{AD} \Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{DH}{6} \Rightarrow DH = 6 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (cm)
 $A_{ABCD} = a \cdot i = AB \cdot DH = 16 \cdot 3\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ (cm²)



$\triangle ABC$ echilateral
 VO înălțimea piramidei
 O : centrul cercului circumscris triunghiului ABC } $\Rightarrow$
 $\Rightarrow VABC$: piramidă triunghiulară regulată.
 VM : apotema piramidei regulate.

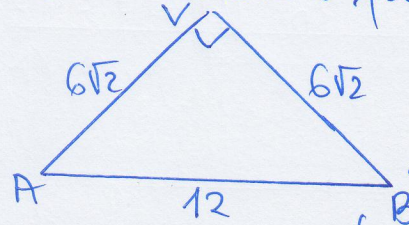
a) $\triangle ABC$: echilateral
 M : mijlocul lui $[BC]$ } $\Rightarrow AM$: mediană și
 înălțime în $\triangle ABC$.
 $i = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AM = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (cm), g.e.d.

b) Calculăm muchiile laterale ale piramidei:



$BM = MC = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (cm)
 În $\triangle MVC$ dreptunghiul isoscel ($VM = MC = 6$ cm) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow VC = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (cm)

Considerăm o față laterală, de exemplu $\triangle VAB$ în care avem:
 $VA^2 + VB^2 = AB^2$ pentru că } R.T. Pitagora
 $(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = 12^2 \Leftrightarrow$
 $72 + 72 = 144$ (A) } $\Rightarrow AV \perp VB$
 Analog, se deduce că } $AV \perp VC$
 $\Rightarrow AV \perp (VBC)$. (O dreaptă perpendiculară pe 2 dr. concurente din pl. e $\perp$ pe pl.)

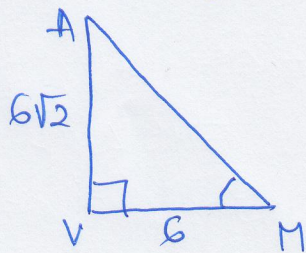


c) $AV \perp (VBC) \mid \Rightarrow AV \perp VM \Rightarrow \Delta VAM$: dreptunghiuc în V.
 $VM \subset (VBC)$

$AV \perp (VBC) \mid \Rightarrow$ Proiecția dreptei AM pe planul (VBC) este VM.
 $M \in (VBC)$

Unghiul format de o dreaptă cu un plan este egal cu unghiul format de dreapta cu proiecția ei pe plan (evident că asta e valabil când dreapta nu e perpendiculară pe plan, atunci proiecția ei fiind un punct, anume piciorul perpendiculairei).

În cazul nostru $m(\widehat{AM}, (VBC)) = m(\widehat{AM}, VM) = m(\widehat{AMV})$.



$$\begin{aligned} VA &= 6\sqrt{2} \text{ cm} \\ VM &= 6 \text{ cm} \end{aligned} \mid \Rightarrow \tan(\widehat{AMV}) = \frac{AV}{VM} = \frac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2},$$

g.e.d.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	60	5p
2.	21	5p
3.	$[-3, 4]$	5p
4.	12	5p
5.	60	5p
6.	5	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic Notează paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$	4p 1p
2.	$11(a+b+c)=132$, deci $a+b+c=12$ și, cum $b=\frac{a+c}{2}$, obținem $b=4$ și $a+c=8$ a, b și c sunt cifre, $a < b < c \Rightarrow a=1, c=7$ sau $a=2, c=6$ sau $a=3, c=5$, deci numerele sunt 147, 246 și 345	3p 2p
3.	$\frac{2}{5} \cdot x + \frac{25}{100} \cdot \left(x - \frac{2}{5} \cdot x\right) + 54 = x$, unde x este suma primită de Mihai de la părinți $\frac{2x}{5} + \frac{3x}{20} + 54 = x$, deci $x=120$ de lei	3p 2p
4.	a) $x = (6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 9\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{3} =$ $= 9\sqrt{5} \cdot \frac{1}{3} = 3\sqrt{5}$ b) $y = \left(2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{21}}{2\sqrt{7}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - (5 - 2\sqrt{5}) = 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 5 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ $N = (3\sqrt{5} + 2\sqrt{5})^{2020} = (5\sqrt{5})^{2020} = 5^{3030}$ și, cum p este număr prim, obținem $p=5$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = 2(x^2 + 6x + 9) - 3(x^2 + 3x - x - 3) + x^2 - 4x + 4 - 31 =$ $= 2x^2 + 12x + 18 - 3x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x - 27 = 2x$, pentru orice număr real x $A = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 2019 - 2 \cdot 2020 = 2(1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 2019 - 2020) =$ $= 2((1-2) + (3-4) + \dots + (2019-2020)) = 2 \cdot (-1) \cdot 1010 = -2020$, deci valoarea absolută a numărului A este 2020	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(16 + 6) =$ $= 2 \cdot 22 = 44 \text{ cm}$	2p 3p
	b) $ME = NF$ și $ME \parallel NF \Rightarrow MENF$ paralelogram MN trece prin mijlocul segmentului EF și $MN \perp EF$, deci dreapta MN este mediatoarea segmentului EF	2p 3p
	c) $MENF$ paralelogram și $MN \perp EF$, deci $MENF$ romb, de unde obținem $ME = NE = 6 \text{ cm}$ și, cum $MN = AD = 6 \text{ cm}$, obținem că $\triangle MNE$ este echilateral Înălțimea triunghiului echilateral MNE este egală cu $3\sqrt{3} \text{ cm}$ și $ABCD$ este paralelogram, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot d(N, AB) = 16 \cdot 3\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$	2p 3p
2.	a) $\triangle ABC$ este echilateral și M este mijlocul segmentului BC , deci $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} =$ $= \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$	3p 2p
	b) O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC și $VO \perp (ABC)$, deci $AV = BV = CV$ și, cum $\triangle ABC$ este echilateral, obținem $\triangle VAB \equiv \triangle VBC \equiv \triangle VAC$ VM este mediană în $\triangle VBC$ și $VM = \frac{BC}{2} \Rightarrow BV \perp CV$, deci $AV \perp BV$, $AV \perp CV$ și, cum $BV \cap CV = \{V\}$, obținem $AV \perp (VBC)$	2p 3p
	c) $AV \perp (VBC) \Rightarrow \sphericalangle(AM, (VBC)) = \sphericalangle(AM, VM) = \sphericalangle AMV$	2p
	$AV \perp (VBC) \Rightarrow AV \perp VM \Rightarrow AV = \sqrt{AM^2 - VM^2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, deci $\text{tg}(\sphericalangle AMV) = \frac{AV}{VM} = \sqrt{2}$	3p